数理解析研究所講究録
136巻 1972年 154-165

Intermediate spaceにおける補間定理とHardy-Littlewood-Sobolevの不等式

阪大 基礎工 小泉澄之

§1. Introduction. (R,μ), (S,ν) は totally σ-finite measure space とする。TはRの上の可測函数をSの上の可測函数に移す変換とする

Tがquasi-linearとは、

(i) Tf_1, Tf_2 が定義されるならば、$T(f_1+f_2)$ もまた一意に定義されて

$$|T(f_1+f_2)| \leq K(|Tf_1|+|Tf_2|)$$

— Kは f_1, f_2 に indep. な正の定数, ≥ 1 — が成立する

(ii) Tf が定義されるならば、cをスカラーとして、$T(cf)$ も一意に定義されて、

$$|T(cf)| = |c|\,|Tf|$$

が成立つ。

$L_a(R,\mu)$ は Lebesgue space. すなわち、fはRの上で定義された μ-可測函数で、次の積分

$$\|f\|_{a,\mu} = \left(\int_R |f|^a d\mu\right)^{\frac{1}{a}} < \infty$$

が存在するような函数fの作る空間とする。

Tが type (a,b) であるとは、各 $f \in L_a(R,\mu)$ に対して $\hat{f} = Tf$ は $L_b(S,\nu)$ に属し、

$$\|\tilde{f}\|_{b,\nu} \leqq M \|f\|_{a,\mu}$$

—Mはfにindep.な定数である.——が成り立つことをいう. この不等式が成り立つような最小のMを作用素Tの(a,b)-normという.

Tはweak type (a,b)であるとは,（$1 \leqq b < \infty$として）. 任意に与えられた正数$y>0$に対して, $E_y = \{x \mid |\tilde{f}(x)| > y\}$とするとき,

$$\nu(E_y[\tilde{f}]) \leqq \left(\frac{M}{y}\|f\|_{a,\mu}\right)^b$$

—Mはfにindep.な定数である—が成り立つことをいう. 上の不等式が成り立つような最小のMを作用素Tの弱(a,b)-normという.

$b=\infty$のときweak type (a,∞)はtype (a,∞)と同一と定義し、両者の間を区別しない、

吾々は前に、次の定理を証明した、

<u>Theorem</u> a quasi-linear operation Tがweak type $(1,1)$かつ, type (p,p), $p>1$とする、このとき、次の関係式が成り立つ、

$$\int_{|Tf|\leqq 1} |Tf|^p d\nu + \int_{|Tf|>1} |Tf|\, d\nu$$

$$\leqq K\left\{\int_{|f|\leqq 1} |f|^p d\mu + \int_{|f|>1} |f|(1+\log|f|)\, d\mu\right\}$$

え

— K は f に indep. かつ，M_0, M_1, p にのみ dep. する定数である．ここで，M_0, M_1 は，それぞれ 弱 $(1,1)$-norm, (p,p)-norm である．See. S. Koizumi [2].

この定理は Calderon-Zygmund 型の singular integral operator に対して応用される．しかしながら，Hardy-Littlewood-Sobolev の fractional integral (or potential operator) には適用出来ない．See. A. Zygmund [5].

$$\tilde{f}_\lambda(x) = P.V. \int_{E_n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n\lambda}}\, dy$$

これは，weak type $(1, \frac{1}{\lambda})$, type (r,s). ここに

$$1<r<s<\infty, \quad \frac{1}{r}-\frac{1}{s} = 1-\lambda \quad (0<\lambda<1)$$

である．そこで次の定理を証明する．

<u>Theorem 1</u> a quasi-linear operation T が weak type (a_1, b_1), type (a_2, b_2) とする．ここに $\frac{1}{a_i}=\alpha_i$, $\frac{1}{b_i} = \beta_i$ $(i=1,2)$ として．点 (α_i, β_i) $(i=1,2)$ は三角形領域 Δ : $0<\beta \leqq \alpha \leqq 1$ に属し，$\alpha_1 > \alpha_2$, $\beta_1 > \beta_2$ — 従って $a_1 < a_2$, $b_1 < b_2$ — とする．このとき

$$\int_{|Tf| \leqq 1} |Tf|^{b_2} + \int_{|Tf|>1} |Tf|^{b_1}\, d\nu$$

$$\leqq K \left\{ \left(\int_{|f| \leqq 1} |f|^{a_2} d\mu \right)^{b_2} + \left(\int_{|f|>1} |f|^{a_1} (\log |f|)^{1/k_1} d\mu \right) + \right.$$

$$+\left(\int_{|f|>1}|f|^{a_1}\,d\mu\right)^{\kappa_1+\kappa_2}\Bigg\}.$$

— K は f に indep. operation T の norms M_1, M_2, a_i, e_i にのみ dep. する定数 — が成立つ。ここに $\kappa_i=\dfrac{e_i}{a_i}$ $(i=1,2)$ とする。

この定理を H-L-S- 積分に応用して、

<u>Corollary 1</u> H-L-S-operator $\tilde{f}_\lambda(x)$ において、次の不等式が成立する。

$$\int_{|\tilde{f}_\lambda|\leqq 1}|\tilde{f}_\lambda|^s\,dx+\int_{|\tilde{f}_\lambda|>1}|\tilde{f}_\lambda|^{\frac{1}{\lambda}}\,dx$$

$$\leqq K\left\{\left(\int_{|f|\leqq 1}|f|^r\,dx\right)^{\frac{s}{r}}+\left(\int_{|f|>1}|f|\,dx\right)^{\frac{1}{\lambda}+\frac{s}{r}}+\left(\int_{|f|>1}|f|(\log|f|)^{\lambda}\,dx\right)^{\frac{1}{\lambda}}\right\}$$

— K は f に indep. で r, s, λ, operation の norm M_1, M_2 にのみ dep. する定数である。

<u>§2. Proof of Theorem 1.</u>

$$f=g+h\ ,\quad g=\begin{cases}f & \text{if } |f|\leqq 1\\ 0, & \text{otherwise},\end{cases}$$

と分解する。T は type (a_2, e_2) だから、

$$(1)\quad\left(\int_S|Tg|^{b_2}\,d\nu\right)^{\frac{1}{b_2}}\leqq M_2\left(\int_R|g|^{a_2}\,d\mu\right)^{\frac{1}{a_2}}=M_2\left(\int_{|f|\leqq 1}|f|^{a_2}\,d\mu\right)^{\frac{1}{a_2}}$$

Tは weak type (a_1, b_1) だから $|Th|$の分布函数を $n(y)$ として，
$$\int_{|Th|\leqq 1} |Th|^{b_2} d\nu = -n(1) + b_2 \int_0^1 y^{b_2-1} n(y)\,dy$$
$$< b_2 \int_0^1 \left(\frac{M_1}{y} \|h\|_{a_1}\right)^{b_1} y^{b_2-1} dy$$
$$= b_2 (M_1 \|h\|_{a_1})^{b_1} \int_0^1 y^{b_2-b_1-1} dy$$

(2) $$\int_{|Th|\leqq 1} |Th|^{b_2} d\nu = \frac{b_2}{b_2-b_1} M_1^{b_1} \left(\int_{|f|>1} |f|^{a_1} d\mu\right)^{\frac{b_1}{a_1}}$$

次に $h = h_1 + h_2$, $h_2 = \begin{cases} h & \text{if } |h| \leqq z \\ e^{i\arg h} z, & \text{if } |h| > z \end{cases}$

と分解する．このとき $|h| = |h_1| + |h_2|$ であって，$|Th|$, $|Th_i|$ の分布函数を $n(y)$, $n_i(y)$ $(i=1,2)$ および $|h|$, $|h_i|$ のそれらを $m(y)$, $m_i(y)$ $(i=1,2)$ とかくことにすると，
$$n(y) \leqq n_1\left(\frac{y}{2K}\right) + n_2\left(\frac{y}{2K}\right)$$
$$\leqq M_1^{b_1} \left(\frac{y}{2K}\right)^{-b_1} \|h_1\|_{a_1}^{b_1} + M_2^{b_2} \left(\frac{y}{2K}\right)^{-b_2} \|h\|_{a_2}^{b_2}$$

$m_2(y) = m(1)$　$0<y\leqq 1$; $= m(y)$, $1<y<z$; $= 0$, $y \geqq z$: $m_1(y) = m(y+z)$, $y>0$ だから
$$\int_{|Th|>1} |Th|^{b_1} d\nu = -\int_1^\infty y^{b_1} dn(y)$$
$$= -y^{b_1} n(y)\Big|_{y=1}^{y=\infty} + b_1 \int_1^\infty y^{b_1-1} m(y)\,dy$$

$$= m(1) + b_1 \int_1^\infty y^{b_1 - 1} m(y)\,dy$$

ここで，まず

$$m(1) \leqq (M_1 \|h\|_{a_1})^{b_1} = M_1^{b_1} \Big(\int_{|f|>1} |f|^{a_1} d\mu \Big)^{\frac{b_1}{a_1}}$$

次に

$$b_1 \int_1^\infty y^{b_1 - 1} m(y)\,dy$$

$$\leqq b_1 (2K)^{b_2} M_2^{b_2} \int_1^\infty y^{b_2 - b_1 - 1} \Big(\int |h_2|^{a_2} d\mu \Big)^{\frac{b_2}{a_2}} + b_1 (2K)^{b_1} M_1^{b_1} \int_1^\infty y^{-1} \Big(\int |h_1|^{a_1} d\mu \Big)^{\frac{b_1}{a_1}} dy$$

$$= b_1 (2K)^{b_2} M_2^{b_2} I_2 + b_1 (2K)^{b_1} M_1^{b_1} I_1 \quad \text{say}$$

$$I_2 = \int_1^\infty y^{b_2 - b_1 - 1} \Big(-\int_0^\infty t^{a_2} dm_2(t) \Big)^{\kappa_2} dy, \qquad \kappa_2 = \frac{b_2}{a_2}$$

$$= \int_1^\infty y^{b_2 - b_1 - 1} \Big(-t^{a_2} m(t) \Big|_{t=1}^{t=z} + a_2 \int_1^z t^{a_2 - 1} m(t)\,dt \Big)^{\kappa_2} dt$$

$$\leqq 2^{\kappa_2} \int_1^\infty y^{b_2 - b_1 - 1} m(1)^{\kappa_2} dy + 2^{\kappa_2} \int_1^\infty y^{b_2 - b_1 - 1} \Big(\int_1^z t^{a_2 - 1} m(t)\,dt \Big) dy$$

$$= 2^{\kappa_2} (I_{21} + I_{22}), \quad \text{say.}$$

$$I_{21} = (b_2 - b_1)^{-1} m(1)^{\kappa_2}$$

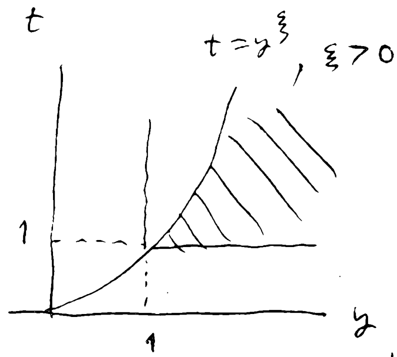
$$I_{22}^{1/\kappa_2} = \sup_{\chi} \int_1^\infty y^{b_2 - b_1 - 1} \Big(\int_1^z t^{a_2 - 1} m(t)\,dt \Big) \chi(y)\,dy,$$

ここで $\chi(y)$ は，

$$\int_1^\infty y^{b_2 - b_1 - 1} \chi^{\kappa_1'}(y)\,dy \leqq 1$$

を満足する函数族とする．

$z = y^{\xi}$, $\xi > 0$ とおいて. —— ξ は後で定める ——.



$$\int_1^\infty y^{b_2-b_1-1}\left\{\int_1^z t^{a_2-1} m(t)\,dt\right\}\chi(y)\,dy$$

$$= \int_1^\infty t^{a_2-1} m(t)\left\{\int_{t^{1/\xi}}^\infty y^{b_2-b_1-1}\chi(y)\,dy\right\}dt$$

$$= \int_1^\infty t^{a_2-1} m(t)\,dt\left\{\int_{t^{1/\xi}}^\infty y^{b_2-b_1-1}\chi(y)\,dy\right\}^{1/\alpha_2}\left\{\int_{t^{1/\xi}}^\infty y^{b_2-b_1-1}\chi^{\alpha_2'}(y)\,dy\right\}^{1/\alpha_2'}$$

$$\leq (b_2-b_1)^{-1/\alpha_2}\int_1^\infty t^{a_2-1+\frac{b_2-b_1}{\alpha_2\xi}}\,m(t)\,dt$$

ここで, $a_2-1+\dfrac{b_1-b_2}{\alpha_2\xi} = a_1-1$ とおいて, ξ について解くと,

$$\xi = \frac{b_1-b_2}{\alpha_2(a_2-a_1)} = \frac{a_2(b_2-b_1)}{b_2(a_2-a_1)} > 0$$

これを代入して,

$$I_2 \leq 2^{\alpha_2}(b_2-b_1)^{-1}\left\{\int m(1)^{\alpha_2} + \left(\int_1^\infty t^{a_1-1} m(t)\,dt\right)^{\alpha_2}\right\}$$

$$\leq 2^{\alpha_2}(b_2-b_1)^{-1}\left\{a_1 m(1) + \int_1^\infty t^{a_1-1} m(t)\,dt\right\}^{\alpha_2}$$

$$= 2^{\alpha_2}(b_2-b_1)\left(\int_{|h|>1}|h|^{a_1}\,d\mu\right)^{\alpha_2} = 2^{\alpha_2}(b_2-b_1)^{-1}\left(\int_{|f|>1}|f|^{a_1}\,d\mu\right)^{\alpha_2}$$

次に,

$$I_1 = \int_1^\infty y^{-1}\left\{-\int_0^\infty t^{a_1}\,dm_1(t)\right\}^{\alpha_1}dy$$

$$= \int_1^\infty y^{-1}\left\{a_1\int_0^\infty t^{a_1-1} m(t+z)\,dt\right\}^{\kappa_1} dy$$

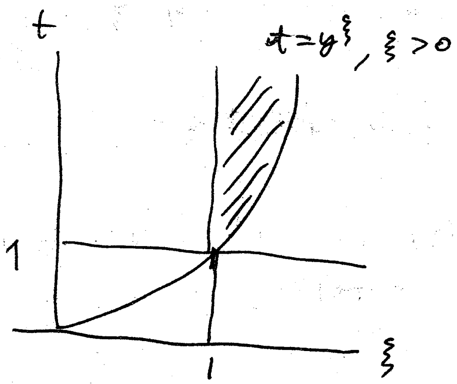
$$= \int_1^\infty y^{-1}\left\{a_1\int_z^\infty (t-z)^{a_1-1} m(t)\,dt\right\}^{\kappa_1} dy = a_1^{\kappa} I_{11} \quad \text{say}$$

$$I_{11}^{1/\kappa_1} = \sup_w \int_1^\infty y^{-1}\left\{\int_z^\infty (t-z)^{a_1-1} m(t)\,dt\right\} w(y)\,dy$$

ここで $w(y)$ は、

$$\int^\infty y^{-1} w^{\kappa_1'}(y)\,dy \leqq 1$$

を満足する函数族とする。



$$\int_1^\infty y^{-1}\left\{\int_z^\infty (t-z)^{a_1-1} m(t)\,dt\right\} w(y)\,dy$$

$$\leqq \int_1^\infty (t-z)^{a_1-1} m(t) \int_1^{t^{1/\xi}} y^{-1} w(y)\,dy$$

$$\leqq \int_1^\infty t^{a_1-1} m(t)\,dt \left\{\int_1^{t^{1/\xi}} y^{-1}\,dy\right\}^{1/\kappa_1} \left\{\int_1^{t^{1/\xi}} y^{-1} w(y)^{\kappa_1'}\,dy\right\}^{1/\kappa_1'}$$

$$\leqq \int_1^\infty t^{a_1-1}\left(\log t^{1/\xi}\right)^{1/\kappa_1} m(t)\,dt = \xi^{-1/\kappa_1}\int_1^\infty t^{a_1-1} (\log t)^{\frac{1}{\kappa_1}} m(t)\,dt$$

ここで

$$a_1 t^{a_1-1}(\log t)^{1/\kappa_1} = \left(t^{a_1}(\log t)^{1/\kappa_1}\right)' - \frac{1}{\kappa_1} t^{a_1-1}(\log t)^{1/\kappa_1 - 1}$$

$$< \left(t^{a_1}(\log t)^{1/\kappa_1}\right)' \quad \text{for} \quad t>1$$

従って、

$$\xi^{-1/\kappa_1} \int_1^\infty (t^{a_1}(\log t)^{1/\kappa_1})' m(t)\, dt$$

$$= \xi^{-1/\kappa_1} \left\{ t^{a_1}(\log t)^{1/\kappa_1} m(t) \Big|_{t=1}^{t=\infty} - \int_1^\infty t^{a_1}(\log t)^{1/\kappa_1} dm(t) \right\}$$

$$= \xi^{-1/\kappa_1} \int_{|h|>1} |h|^{a_1}(\log |h|)^{1/\kappa_1} d\mu = \xi^{-1/\kappa_1} \int_{|f|>1} |f|^{a_1}(\log |f|)^{1/\kappa_1} d\mu$$

ここで　$\xi = a_2(b_2-b_1)/b_2(a_2-a_1) > 0$.　故に

$$I_1 \leqq a_1^{\kappa_1} \xi^{-1} \left(\int_{|f|>1} |f|^{a_1} (\log |f|)^{1/\kappa_1} d\mu \right)^{\kappa_1}$$

以上の評価式から.

$$(3) \int_{|Th|>1} |Th|^{b_1} d\nu \leqq M_1^{b_1} \left(\int_{|f|>1} |f|^{a_1} d\mu \right)^{\kappa_1} + b_1(2K)^{b_2} M_2^{b_2} 2(b_2-b_1)^{-1} \times$$

$$\times \left(\int_{|f|>1} |f|^{a_1} d\mu \right)^{\kappa_2} + b_1(2K)^{b_1} M_1^{b_1} a_1^{\kappa_1} \frac{b_2(a_2-a_1)}{a_2(b_2-b_1)} \times$$

$$\times \left(\int_{|f|>1} |f| (\log |f|)^{1/\kappa_1} d\mu \right)^{\kappa_1}$$

すなわち,

$$\int_{|Th|>1} |Th|^{b_1} d\nu \leqq \mathrm{const} \left\{ \left(\int_{|f|>1} |f|^{a_1} d\mu \right)^{\kappa_1+\kappa_2} + \left(\int_{|f|>1} |f|^{a_1} (\log |f|)^{1/\kappa_1} d\mu \right)^{\kappa_1} \right\}$$

以下の計算は全く前の定理の場合と同様であって、次の Lemma に (1), (2) および (3) を適用して得られる.

Lemma　$A, B, C > 0$ かつ $A \leqq K(B+C)$ が成立しているとき、次の不等式が成立つ。

(i) $0 < A \leqq 1$ のとき

$$A \leqq \begin{cases} K(B+C), & \text{if } 0<C<1 \\ K\left(B + C^{\frac{b_1}{b_2}}\right), & \text{if } C>1 \end{cases}$$

(ii) $A > 1$ のとき

$$A < \begin{cases} (2K)^{\frac{b_2}{b_1}}\left(B^{\frac{b_2}{b_1}} + C^{\frac{b_2}{b_1}}\right), & \text{if } 0<C<1 \\ (2K)^{\frac{b_2}{b_1}}\left(B^{\frac{b_2}{b_1}} + C\right), & \text{if } C>1 \end{cases}$$

Lemma の証明は略する。

(1), (2), (3) と Lemma より、

$$\int_{|Tf|>1} |Tf|^{b_1} d\nu$$

$$\leqq K'\left\{ \left(\int_{|f|\leqq 1} |f|^{a_2} d\mu\right)^{k_2} + \left(\int_{|f|>1} |f|^{a_1} d\mu\right)^{k_1+k_2} + \left(\int_{|f|>1} |f|^{a_1} (\log|f|)^{1/k_1} d\mu\right)^{k_1} \right\}$$

$$\int_{|Tf|\leqq 1} |Tf|^{b_2} d\nu$$

$$\leqq K''\left\{ \left(\int_{|f|\leqq 1} |f|^{a_2} d\mu\right)^{k_2} + \left(\int_{|f|>1} |f|^{a_1} d\mu\right)^{k_1+k_2} + \left(\int_{|f|>1} |f|^{a_1} (\log|f|)^{1/k_1} d\mu\right)^{k_1} \right\}$$

よって定理1は証明された。

Corollary 1 は定理1から直ちに得られる。

§3. Some remarks

(1) ここで用いた方法は，本質的には A. Zygmund [5] が用いた方法を借用している．他の方法として，例えば S. Yano [4] の extrapolation method がある．これは，いまの処 sub-linear operator にしか適用出来ない．しかし，例えば

$$(3)' \quad \left(\int_{|\tilde{f}_\lambda|>1} |\tilde{f}_\lambda|^{\frac{1}{\lambda}}\, dx\right)^{\lambda} \leqq \left\{O(1)\int_{|f|>1} |f|(\log|f|)^{\lambda}\, dx + O(1)\right\} \max\left(1, \left(M_0\int_{|f|>1} |f|\, dx\right)^{\frac{s\lambda-1}{s\lambda}}\right)$$

が得られる．

(2) 他の方法として，Lorentz space や Lions-Peetre の K-norm などについて，この定理が一般化されることが望ましい．しかし，critical case (interpolating parameter θ が 0 or 1 の case) なので簡単ではない．

References

[1] G. H. Hardy – J. E. Littlewood, Some properties of fractional integral (I), Math. Zeit. 28 (1928), 565–606, II, ibid., 34 (1931–2), 403–439.

[2] S. Koizumi, Contributions to the theory of interpolation

of operations. Osaka J. Math. vol. 8 (1971), 135-149.

[3]. S.L. Sobolev, On a theorem of functional analysis, Mat. Sbornik, vol. 4 (1938), 279–282.

[4]. S. Yano, An extrapolation theorem, J. Math. Soc. Japan, 3 (1951), 296–305

[5] A. Zygmund, On a theorem of Marcinkiewicz concerning interpolation of operations, J. Math. Pures et Appl. 35 (1956), 223–248.

[6] A. Zygmund, Trigonometrical series, I, II, Cambridge (1959).

Department of Applied Mathematics
The Osaka University.